Determinantes

1. Definição

Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n sobre o corpo dos reais. Associamos a A um escalar de $\mathbb{R}$ chamado determinante de A, como sendo a soma de todos os termos da forma $(-1)^t.a_{1k_1}.a_{2k_2}.....a_{nk_n}$, onde os índices k_i's das colunas assumem todas as arrumações possíveis nas quais cada coluna é representada exatamente uma vez em cada termo da soma e o expoente t é algum número de transposições necessárias para trazer de volta os índices das colunas $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$ à sua ordem natural.

Indicaremos o determinante da matriz A por det $[A]$ ou $|A|$.

Observações:

a) Notemos que os índices das linhas se mantêm na ordem natural e os índices das colunas assumem todas as $n!$ reordenações possíveis.

b) Algoritmo para cálculo de determinante de ordem 2:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}.$$

$\ominus \qquad \oplus$

c) Algoritmo para cálculo do determinante de ordem 3 (*regra de Sarrus*):

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \qquad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}) -$$
$$-(a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

2. Desenvolvimento de determinantes por cofatores (Teorema de Laplace)

2.1. Definição de menor complementar e cofator

Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ sobre o corpo dos reais. Seja A_{ij} a submatriz de A obtida suprimindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. O *menor* do elemento a_{ij} de A é o determinante da submatriz A_{ij}, indicado por det A_{ij}. O *cofator* do elemento a_{ij}, indicado por $C_{ij} = (-1)^{i+j}.\det A_{ij}$.

Exemplo: Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$, determine:

a) o menor do elemento a_{23};
b) o cofator do elemento a_{23}.

Resolução:

a) $\det A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 24$.

b) $C_{23} = (-1)^{2+3}.\det A_{23} = (-1)^5.24 = -24$.

2.2. Teorema de Laplace

Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ sobre o corpo dos reais, então:

- $\det A = a_{i1}.C_{i1} + a_{i2}.C_{i2} + ... + a_{in}.C_{in}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
- $\det A = a_{1j}.C_{1j} + a_{2j}.C_{2j} + ... + a_{nj}.C_{nj}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sendo que C_{ij} é o cofator do elemento a_{ij}.

Observação: As expressões dadas na definição são chamadas de desenvolvimento do determinante de A em relação a i-ésima linha e a j-ésima coluna, respectivamente.

Exemplo: Seja $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $|A|$ desenvolvendo em relação à 1ª linha.
b) Calcule $|A|$ desenvolvendo em relação à 1ª coluna.

Resolução:

a) $\det\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = .$

$= 2.\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 5.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -93$

b) $\det\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$

$= 2.\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -93$

3. Propriedades dos determinantes

Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n sobre o corpo dos reais.

P.1) Os determinantes da matriz A e de sua transposta A^t são iguais, isto é $\det A=\det A^t$.

P.2) Se os elementos de uma fila qualquer de A forem nulos, então det $A = 0$.

P.3) Se os elementos de duas filas paralelas de A forem respectivamente iguais, então det $A = 0$.

P.4) Se os elementos de duas filas paralelas de A forem respectivamente proporcionais, então det $A = 0$.

P.5) Se A tem uma fila que é combinação linear de outras filas paralelas, então det $A = 0$.

P.6) Se trocarmos de posição duas filas paralelas de A, obtemos uma nova matriz A' tal que det $A = -\det A'$.

P.7) Se multiplicarmos uma fila qualquer de A por uma constante k, obtemos uma nova matriz A' tal que det $A' = k.\det A$.

P.8) Se multiplicarmos todos os elementos de A por uma constante k, obteremos uma nova matriz $A' = k.A$ tal que det A' = det $(k.A) = k^n.\det A$, onde n é a ordem de A.

P.9) *Teorema de Jacobi*: Se adicionarmos a uma fila qualquer uma combinação linear das demais filas paralelas de uma matriz, seu determinante não se altera.

P.10) *Teorema de Cauchy*: A soma dos produtos dos elementos de uma fila de A pelos cofatores dos correspondentes elementos de outra fila paralela de A é zero, isto é:

- $a_{i1}.C_{k1}+a_{i2}.C_{k2}+\ldots+a_{in}.C_{kn}=0$, se $k\neq i$.
- $a_{1j}.C_{1k}+a_{2j}.C_{2k}+\ldots+a_{nj}.C_{nk}=0$, se $k\neq j$.

P.11) *Adição de determinantes*: Se os elementos da j-ésima coluna de A são tais que:

$$\begin{cases} a_{1j}=b_{1j}+c_{1j} \\ a_{2j}=b_{2j}+c_{2j} \\ \quad\cdots \\ a_{nj}=b_{nj}+c_{nj} \end{cases},$$

isto é,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & (b_{1j}+c_{1j}) & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & (b_{2j}+c_{2j}) & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (b_{nj}+c_{nj}) & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então, teremos que:

det A = det A' + det A'', onde

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$A''=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & c_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & c_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & c_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Observações:

a) A propriedade **P.1** garante que toda propriedade do determinante de uma matriz A, no que diz respeito às linhas terá uma análoga em relação às colunas.

b) Se f_1, f_2, ..., f_n são as filas paralelas de uma matriz A, diremos que uma fila é combinação linear das outras, se existirem escalares (números reais), α_1, α_2, ..., α_n nem todos nulos, tais que $\alpha_1.f_1+\alpha_2.f_2+\ldots+\alpha_n.f_n=0$.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & x \\ b & 2 & y \\ c & 3 & z \end{vmatrix}$, pois são determinantes de matrizes transpostas.

b) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix}=0$, pois o determinante possui uma fila nula.

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0$, pois o determinante possui filas paralelas iguais.

d) $\begin{vmatrix} a & b & 2b \\ 1 & 2 & 4 \\ x & y & 2y \end{vmatrix}=0$, pois o determinante tem a 3ª coluna como o dobro da 2ª coluna (filas paralelas proporcionais).

e) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+3x & 2b+3y & 2c+3z \\ x & y & z \end{vmatrix}=0$, pois a 2ª linha é combinação linear das demais. ($L_2=2.L_1+3.L_3$).

f) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c & b \\ 1 & 3 & 2 \\ x & z & y \end{vmatrix}$, pois houve 1 inversão de colunas.

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, pois houve 2 inversões de linhas.

g) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$, pois multiplicamos a 2ª linha por 2.

h) $\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4 & 8 & 12 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = 4^3.\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$, pois multiplicamos cada elemento do determinante por 4.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c-2a+b \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & x-2y+z \end{vmatrix}$, pois somamos à 3ª coluna uma combinação linear das outras colunas (*Teorema de Jacobi*).

j) $\begin{vmatrix} a & 3 & c \\ m & 6 & p \\ x & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & c \\ m & 2 & p \\ x & 0 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2 & c \\ m & 4 & p \\ x & 1 & z \end{vmatrix}$.

4. Determinantes de matrizes especiais

4.1. Matriz triangular superior ou inferior

Se A for uma *matriz triangular superior* ou *inferior*, então o determinante de A é o produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 0 \\ 9 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.5.3.4 = 60$.

4.2. Matriz com todos elementos acima ou abaixo da diagonal secundária nulos

Se todos os elementos de A, situados acima ou abaixo da diagonal secundária forem nulos, então o determinante de A é o produto dos elementos da diagonal secundária, precedido pelo fator $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^k$, onde n é a ordem da matriz e k o número de zeros acima ou abaixo, conforme o caso, da diagonal secundária.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^6.2.1.2.1 = 4$.

4.3. Matriz de Vandermonde ou matriz das potências

Denominamos *matriz de Vandermonde* ou *matriz das potências* a qualquer matriz quadrada do tipo:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ (a_1)^2 & (a_2)^2 & (a_3)^2 & \ldots & (a_n)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_1)^{n-1} & (a_2)^{n-1} & (a_3)^{n-1} & \ldots & (a_n)^{n-1} \end{bmatrix},$$

onde seu determinante é indicado por $V[a_1, a_2, ..., a_n]$.

Podemos provar que seu determinante é dado por:

$V[a_1, a_2, ..., a_n] =$

$$(a_2-a_1).(a_3-a_1).(a_3-a_2).....(a_n-a_{n-1}) = \prod_{i>j}(a_i-a_j),$$

$$\begin{cases} i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} \\ j \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\} \end{cases}.$$

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$

$= V[2,3,4,5] = (3-2).(4-2).(4-3).(5-2).(5-3).(5-4) = 12$

5. Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então det $(A.B)$ = det (A).det (B).

Observação: *Podemos generalizar o teorema de Binet para* k *matrizes quadradas de ordem* n*: det* $(A_1.A_2.A_3. \ldots .A_k)$ *= det* (A_1)*.det* (A_2)*.det* (A_3)*. … .det* (A_k)*.*

6. Matriz inversa

Uma matriz quadrada A de ordem n é dita matriz *inversível*, se existir uma matriz B tal que $A.B = B.A = I_n$. Quando existe a matriz B, ela é chamada da *matriz inversa* de A e a indicamos por A^{-1}, assim: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$.

Observação: Se uma matriz A é inversível, então A é uma matriz quadrada. (Notemos que a multiplicação $A.A^{-1}$ é comutativa, daí A e A^{-1} são matrizes quadradas de mesma ordem.)

6.1. Teorema (Unicidade da matriz inversa)

Se A é uma matriz real inversível, então sua inversa é única.

Demonstração:

Vamos admitir que C e B sejam inversas de A tais que $C \neq B$. Pela definição de matriz inversa, temos:

$A.C = C.A = I_n$ e $A.B = B.A = I_n$.

$C = I_n.C = (B.A).C = B.(A.C) = B.I_n = B$, o que, por hipótese, é um absurdo.

Exemplo: Verificar se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matiz inversível e, caso seja, obter sua inversa.

Resolução:

Seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $A.A^{-1} = I_2$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} a+2c=1 \\ 2a+3c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = 2 \text{ e } a = -3. \\ \left.\begin{matrix} b+2d=0 \\ 2b+3d=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d = -1 \text{ e } b = 2. \end{cases}$$

Portanto, a matriz A é inversível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

7. Inversão de matrizes por determinantes

8.1. Matriz singular

Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é *singular* se, e somente se, seu determinante for nulo. Ou seja:

- $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ é uma matriz *singular*.
- $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ é uma matriz *não singular*.

8.2. Matriz dos cofatores (A')

Matriz dos cofatores é a matriz obtida substituindo cada elemento de A por seu respectivo cofator.

8.3. Matriz adjunta ($\overline{A}$)

Matriz adjunta é a matriz obtida de A' através da operação de transposição, isto é: $\overline{A} = (A')^t$.

8.4. Teorema

Se A é uma matriz quadrada de ordem n, então $A.\overline{A} = \overline{A}.A = \det A.I_n$.

8.5. Teorema

Se A é uma matriz quadrada de ordem n, não singular, então $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$.

Exemplo: Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, calcule:

a) seu determinante;
b) sua matriz dos cofatores;
c) sua matriz adjunta;
d) sua matriz inversa.

Resolução:

a) $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 1.3 - 2.2 = 3 - 4 = -1$.

b) Calculando os cofatores, obtemos:

$$\begin{cases} C_{11} = (-1)^{1+1}.3 = 3 \\ C_{12} = (-1)^{1+2}.2 = -2 \\ C_{21} = (-1)^{2+1}.2 = -2 \\ C_{22} = (-1)^{2+2}.1 = 1 \end{cases}$$

Logo, a matriz dos cofatores é dada por: $A' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $\overline{A} = (A')^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \overline{A} = \dfrac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -1.\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Logo, a matriz inversa é dada por: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

8.6. Propriedades das matrizes inversas

P.1) A é inversível $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ (matriz não singular).
P.2) A não é inversível $\Leftrightarrow \det A = 0$ (matriz singular).
P.3) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, se $\det A \neq 0$ (as operações de transposição e inversão comutam).
P.4) $(A^{-1})^{-1} = A$, se $\det A \neq 0$.
P.5) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$, se $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$.
P.6) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$, se $\det A \neq 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. O determinante da matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$, onde $a_{ij} = 2i - j$, é igual a:

A) –12 B) –8 C) 0 D) 4 E) 6

02. Qual o valor de k para que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$ seja nulo?

A) $-1 \pm \sqrt{2}$
B) $\sqrt{2} \pm 1$
C) $2 \pm \sqrt{2}$
D) $\sqrt{2} \pm 2$
E) $-4 \pm \sqrt{8}$

03. Seja a matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem 2, tal que $a_{ij} = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{2i - j} & \text{se } i = j \\ \text{sen } \dfrac{\pi}{i + j} & \text{se } i \neq j \end{cases}$ o determinante de A é igual a:

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 0 D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{3}{4}$

04. Sabendo-se que o determinante da matriz A é igual a –3, qual é o valor do sen x, $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$?

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & \cos x & 0 \end{bmatrix}$$

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
B) $-\frac{1}{2}$
C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $\frac{1}{2}$

05. Se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 1 \\ 3 & -\frac{1}{6} & \frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}$ é igual a $6 - \frac{3k - 2}{5} - k$, então o valor de k é:

A) 4 B) 9 C) 19 D) 24 E) 28

06. O determinante de $(A_t \times B)$, sendo:

A_t = matriz transposta de A, $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ é:

A) –65 B) 55 C) 202 D) –120 E) n.d.a.

07. Se a e b são as raízes da equação:

$$\begin{vmatrix} 2^x & 8^x & 0 \\ \log_2 x & \log_2 x^2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

onde $x > 0$, então $a + b$ é igual a:

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

08. Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 e I é a matriz identidade também de ordem 3, então det $(A - \lambda.I)$ é um polinômio de grau 3 em λ. Assinale a alternativa correspondente ao conjunto das raízes do polinômio acima definido, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A) {0, 2}
B) {0, 3}
C) {1, –1, 0}
D) {1, 0, 3}
E) {–1, 1, 3}

09. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $f(x) = -x^2 - 1$, então $f\left(-\frac{1}{\det A}\right)$ vale:

(**Obs.:** det A = determinante de A)

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{5}{4}$ D) –3 E) n.d.a.

10. Seja $f : M_n \to R$ a função definida por $f(A)$ = determinante de A, onde M_n é o conjunto das matrizes quadradas de ordem $n \leq 3$. Assinale a alternativa correta:

a) f é injetiva.
b) f é sobrejetiva.
c) $f(A + B) = f(A) + f(B)$.
d) $f(\lambda.A) = \lambda.f(A)$, qualquer que seja $\lambda \in R$.
e) Se $f(A) = 0$, então $A = O$.

11. O valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x-5 & y-5 & z-5 \end{vmatrix}$ é:

A) 1
B) -1
C) $(x-5).(y-5).(z-5)$
D) xyz
E) 0

12. Qual o valor de um determinante de quarta ordem, sabendo-se que multiplicando duas de suas linhas por 3 e dividindo suas colunas por 2 obtém-se o número 27?

A) $\dfrac{243}{16}$ B)18 C) 6 D) 48 E) 27

13. O determinante de uma matriz é 42. Se multiplicarmos a primeira linha da matriz por três e dividirmos sua segunda coluna por nove, a nova matriz terá determinante igual a:
A) 12 B) 14 C) 21 D) 42

14. Uma matriz A de terceira ordem tem determinante 3. O determinante de $2A$ é:
A) 6 B) 8 C) 16 D) 24 E) 30

15. A e B são matrizes quadradas de ordem 3 e $B = cA$, sendo c um número real não nulo. Se o determinante de A é 3 e o determinante da transposta de B é 81, então o valor de c é:
A) 6 B) 2 C) 3 D) 5 E) 4

16. Se A é matriz 3 × 3 de determinante 5, então det $(A + A)$ vale:
A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

17. A e B são matrizes quadradas de ordem 3 e $B = K.A$. Sabe-se que $\det A = 1{,}5$ e $\det B^t = 96$. Então:

A) $K = 64$
B) $K = 96$
C) $K = \dfrac{1}{4}$
D) $K = \dfrac{3}{2}$
E) $K = 4$

18. O produto das matrizes $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

é uma matriz de determinante:
A) igual ao determinante de cada uma delas.
B) igual a zero.
C) menor que zero.
D) com valor absoluto menor que 1.
E) maior que o determinante de cada uma delas.

19. Sendo A, B, C matrizes reais $n \times n$, considere as seguintes afirmações:

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $AB = BA$
3. $A + B = B + A$
4. $\det(AB) = \det(A).\det(B)$
5. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

Então podemos afirmar que:
A) 1 e 2 são corretas.
B) 2 e 3 são corretas.
C) 3 e 4 são corretas.
D) 4 e 5 são corretas.
E) 5 e 1 são corretas.

20. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_3 & c_3 & b_3 \\ a_2 & c_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

onde a_i, b_i e c_i $(i = 1, 2, 3)$ são números reais.
Assinale a alternativa falsa:
A) $(\det(A))^2 = (\det(B))^2 = (\det(C))^2$
B) $\det(A) = -\det(B)$
C) $\det(B) = -\det(C)$
D) $\det(A) = \det(C)$
E) $(\det(A))^2 = \det(B).\det(C)$

21. Se f e g são duas funções reais de variável real satisfazendo $g(x) < f(x) < 0$ para todo número real x e $D(x)$ é o valor do determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ f(x) & f(x) & g(x) \\ g(x) & g(x) & f(x) \end{vmatrix} \text{ então:}$$

A) $D(0) = 0$.
B) $D(1)$ é negativo.
C) $D(-1)$ é positivo.
D) $D(5) + D(0)$ é positivo.
E) $D(-10) + D(-20)$ é positivo.

22. O valor do determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ é:

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

23. Dadas as matrizes A e B, tais que:

$$A=\begin{bmatrix}1&5&-1&3\\0&2&-2&4\\0&0&3&-1\\0&0&0&4\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\3&-4&0&0\\1&2&1&0\\2&1&3&2\end{bmatrix}$$ o valor do determinante de $A.B$ é:

A) –192 B) 32 C) –16 D) 0 E) n.d.a.

24. Considere as seguintes afirmativas:

I – Se A^T é a transposta da matriz quadrada A, então $\det(A^T)=\det(A)$.

II – Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $AA=O$, então a matriz $I-A$ é inversível.

III – Se A é uma matriz inversível, então $\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}$.

A soma dos números associados às afirmativas corretas é:

A) 3 B) 5 C) 6 D) 4

25. A e B são matrizes de ordem 2. O determinante de A é 9. Se $B^{-1}=2.A$, o determinante de B é:

a) 9 b) $\frac{1}{9}$ c) 18 d) $\frac{1}{18}$ e) $\frac{1}{36}$

26. A é uma matriz quadrada de ordem 2, inversível, e det (A) o seu determinante. Se det (2A) = det (A^2), então det (A) será igual a:

a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) 4 e) 16

27. O determinante abaixo

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\\log 8&\log 80&\log 800&\log 8000\\(\log 8)^2&(\log 80)^2&(\log 800)^2&(\log 8000)^2\\(\log 8)^3&(\log 80)^3&(\log 800)^3&(\log 8000)^3\end{vmatrix}$$ vale:

A) $\log(8.80.800.8000)$

B) 12

C) $\log 8^{24}$

D) $\log 8+\log 80+\log 800+\log 8000$

E) 24

28. Dizemos que uma matriz real quadrada A é singular, se det A = 0, ou seja, se o determinante de A é nulo e não singular, se det $A \neq 0$. Mediante esta definição, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

A) A soma de duas matrizes A e B é uma matriz singular, se det A = –det B.

B) O produto de duas matrizes é uma matriz singular se e somente se ambas forem singulares.

C) O produto de duas matrizes é uma matriz singular se pelo menos uma delas for singular.

D) Uma matriz singular possui inversa.

E) A transposta de uma matriz singular é não singular.

29. Sejam A, B e P matrizes reais quadradas de ordem n, tais que $B=P^t.A.P$. Sendo P inversível, dentre as afirmações abaixo, qual é a *falsa*?

A) Se B é simétrica, então A é simétrica.

B) Se A é simétrica, então B é simétrica.

C) Se A é inversível, então B é inversível.

D) Se B é inversível, então A é inversível.

E) det A = det B.

30. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}\operatorname{sen} x & 2\\ \log_3 10 & 2.\operatorname{sen} x\end{bmatrix}$ onde x é real. Então podemos afirmar que:

A) A é inversível apenas para $x>0$.

B) A é inversível apenas para $x=0$.

C) A é inversível para qualquer x.

D) A é inversível apenas para x da forma $(2k+1)\pi$, k inteiro.

E) A é inversível apenas para x da forma $2k\pi$, k inteiro.

31. A matriz $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\K&K^2&K^{-1}&5\\K^2&K^4&K^{-2}&25\\K^3&K^6&K^{-3}&125\end{bmatrix}$ não admite inversa, se:

A) $K=2$ B) $K=3$ C) $K=4$ D) $K=5$ E) n.d.a.

32. Sejam m e n números reais com $m\neq n$ e as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\3&5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

Para que a matriz $mA+nB$ seja não inversível é necessário que:

A) m e n sejam positivos.

B) m e n sejam negativos.

C) m e n tenham sinais contrários.

D) $n^2=7m^2$.

E) n.d.a.

33. Sejam os números reais $a\neq b\neq c\neq d\neq e\neq f\neq 0$.

Então pode-se afirmar que a matriz $A=\begin{bmatrix}x&a&b&c\\x&x&d&e\\x&x&x&f\\x&x&x&x\end{bmatrix}$

A) admite inversa, para qualquer x real.

B) admite inversa, para qualquer $x\neq 0$.

C) admite inversa para qualquer x pertencente ao conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$.

D) não admite inversa se e somente se x pertence ao conjunto $\{0, a\}$.

e) não admite inversa se e somente se x pertence ao conjunto $\{0, a, f, d\}$.

34. Seja A uma matriz real que possui inversa. Seja n um número inteiro positivo e A^n o produto da matriz A por ela mesma n vezes. Das afirmações abaixo, a verdadeira é:

A) A^n possui inversa, qualquer que seja o valor de n.
B) A^n possui inversa apenas quando $n=1$ ou $n=2$.
C) A^n possui inversa e seu determinante independe de n.
D) A^n não possui inversa para valor algum de n, $n>1$.
E) Dependendo da matriz A, a matriz A^n poderá ou não ter inversa.

35. Sejam A, B e C matrizes quadradas $n \times n$ tais que A e B são inversíveis e $ABCA = A^t$, onde A^t é a transposta da matriz A. Então podemos afirmar que:

A) C é inversível e $\det C = \det (AB)^{-1}$.
B) C não é inversível pois $\det C = 0$.
C) C é inversível e $\det C = \det B$.
D) C é inversível e $\det C = (\det A)^2 . \det B$.
E) C é inversível e $\det C = \dfrac{\det A}{\det B}$.

36. **(ESAF)** Considere as matrizes $X = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ e $Y = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & b & 6 \\ 5 & 3 & c \end{vmatrix}$ onde os elementos a, b e c são números naturais diferentes de zero. Então, o determinante do produto das matrizes X e Y é igual a:

A) 0 B) a C) $a+b+c$ D) $a+b$ E) $a+c$

37. **(ESAF)** O determinante de uma matriz 3x3 é igual a x. Se multiplicarmos os três elementos da 1ª linha por 2 e os três elementos da 2ª coluna por –1, o determinante será:

A) $-x^2$ B) $-2x$ C) $4x^2$ D) x^2 E) $-2x^2$

38. **(ESAF)** Seja uma matriz quadrada 4 por 4. Se multiplicarmos os elementos da segunda linha da matriz por 2 e dividirmos os elementos da terceira linha da matriz por –3, o determinante da matriz fica

A) multiplicado por –1
B) multiplicado por –16/81
C) multiplicado por 2/3
D) multiplicado por 16/81
E) multiplicado por –2/3

39. **(ESAF)** Uma matriz X de quinta ordem possui determinante igual a 10. A matriz B é obtida multiplicando-se todos os elementos da matriz X por 10. Desse modo, o determinante da matriz B é igual a:

A) 10^{-6} B) 10^5 C) 10^{10} D) 10^6 E) 10^3

40. **(ESAF)** O determinante da matriz:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & b & 0 \\ 0 & -a & a & -a \\ 0 & 0 & 5 & b \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

onde a e b são inteiros positivos tais que $a>1$ e $b>1$, é igual a:

A) $-60a$ B) 0 C) $60a$ D) $20ba^2$ E) $a(b-60)$

41. **(ESAF)** O determinante da matriz:

$$X = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ 4+a & 2+b & c \end{vmatrix}$$

A) 2bc + c – a
B) 2b – c
C) a + b + c
D) 6 + a + b + c
E) 0

42. **(ESAF)** Qualquer elemento de uma matriz X pode ser representado por x_{ij}, onde "i" representa a linha e "j" a coluna em que esse elemento se localiza. A partir de uma matriz A (a_{ij}), de terceira ordem, constrói-se a matriz B(b_{ij}), também de terceira ordem, dada por:

$$\begin{vmatrix} b_{11}=a_{31} & b_{12}=a_{32} & b_{13}=a_{33} \\ b_{21}=a_{21} & b_{22}=a_{22} & b_{23}=a_{23} \\ b_{31}=a_{11} & b_{32}=a_{12} & b_{33}=a_{13} \end{vmatrix}$$

Sabendo-se que o determinante da matriz A é igual a 100, então o determinante da matriz B é igual a:

A) 50 B) –50 C) 0 D) –100 E) 100

43. **(ESAF)** Considere duas matrizes quadradas de terceira ordem, A e B. A primeira, a segunda e a terceira colunas da matriz B são iguais, respectivamente, à terceira, à segunda e à primeira colunas da matriz A. Sabendo-se que o determinante de A é igual a x^3 ,então o produto entre os determinantes das matrizes A e B é igual a:

A) $-x^{-6}$ B) $-x^6$ C) x^3 D) –1 E) 1

Gabarito

01. C	**16.** D	**31.** D
02. A	**17.** E	**32.** C
03. E	**18.** A	**33.** E
04. B	**19.** C	**34.** A
05. A	**20.** E	**35.** A
06. B	**21.** B	**36.** A
07. C	**22.** E	**37.** B
08. B	**23.** E	**38.** E
09. B	**24.** C	**39.** D
10. B	**25.** E	**40.** A
11. E	**26.** D	**41.** E
12. D	**27.** B	**42.** D
13. B	**28.** C	**43.** B
14. D	**29.** E	
15. C	**30.** C	