Matrizes

1. Matriz real

1.1. Definição

Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois números inteiros.

Uma *matriz real* de ordem $m \times n$ é um conjunto de $m.n$ números reais, distribuídos em m linhas e n colunas, formando uma tabela que se indica em geral por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

i-ésima linha

j-ésima coluna

Observações:

O.1) Cada um dos números reais a_{ij} de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é chamado elemento, entrada ou termo da matriz A. O termo a_{ij} é o termo geral de A.

O.2) Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é uma matriz, então:

- A é chamada *matriz quadrada* de ordem n se, e somente se, $m = n$.
- A é chamada *matriz retangular* se, e somente se, $m \neq n$.
- A é chamada *matriz linha* se, e somente se, $m = 1$ e *matriz coluna* se, e somente se, $n = 1$.

O.3) Indicaremos por $M_{m \times n}(\mathrm{R})$ o conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$ e por $M_n(\mathrm{R})$ o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n.

O.4) Uma matriz de ordem 1×1, (a_{11}), se identifica com o número real a_{11}.

O.5) As matrizes em geral são indicadas pelas letras maiúsculas do nosso alfabeto.

O.6) Seja A uma matriz quadrada de ordem n, então definimos:

- *diagonal principal de A*: é a seqüência de termos da matriz A que apresentam mesmo índice, ou seja, $(a_{ij} \mid i = j) = (a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn})$;

- *diagonal secundária de A*: é a seqüência de termos da matriz A tais que a soma de seus índices é igual a $n + 1$, ou seja, $(a_{ij} \mid i + j = n + 1) = (a_{1,n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n,1})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

diagonal secundária *diagonal principal*

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

é uma matriz real 2 ×4. Logo, A $\in$ M$_{2\times4}$*(R).*

Ou $(a_{ij})_{m\times n}$

2. Igualdade de matrizes

2.1.Definição

Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ duas matrizes reais. Diz-se que as matrizes A e B são iguais, e escreve-se $A = B$, se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ e $\forall j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Exemplo: $\Leftrightarrow x = -1$ ***e*** $y = 3$, ***já que*** $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2}$ ***e*** $\log_2 2 = 1$.

3. Algumas matrizes especiais

3.1. Matriz nula

A *matriz nula* $m \times n$, indicada por $\mathrm{O}_{m \times n}$ é tal que $a_{ij} = 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ e $\forall j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Exemplos:

a) (matriz nula de ordem 2).

b) $\mathrm{O}_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (matriz nula de ordem 2×3).

3.2. Matriz identidade

A *matriz identidade* de ordem n, indicada por $I_n = (a_{ij})$, é tal que $a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i = j \end{cases}$.

Exemplos:

a) $I_1 = (1)$ (matriz identidade de ordem 1).

b) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matriz identidade de ordem 2).

c) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matriz identidade de ordem 3).

3.3. Matriz diagonal, triangular superior e triangular inferior

• A é uma *matriz diagonal* se, e somente se, $a_{ij} = 0$, quando $i \neq j$.
• A é uma *matriz triangular superior* se, e somente se, $a_{ij} = 0$, quando $i > j$.
• A é uma *matriz triangular inferior* se, e somente se, $a_{ij} = 0$, quando $i < j$.

Observação: Podemos entender matriz diagonal como uma matriz triangular superior e inferior.

4. Matriz transposta
4.1. Definição

Seja $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. A *matriz transposta* de A, indicada por A^t (ou A'), é a matriz $n \times m$ $A^t = (b_{ij})$, onde $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ e $\forall j \in \{1, 2, 3, ..., m\}$.

Em outras palavras, denominamos matriz transposta de A à matriz $n \times m$ cujas colunas coincidem ordenadamente com as linhas de A.

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 6 & 0 & 5 & \sqrt{2} \end{pmatrix}_{2\times 4}$, então

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ -4 & \sqrt{25} \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

5. Operações com matrizes
5.1. Adição

Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ duas matrizes quaisquer. Indicaremos por $A + B$ e chamaremos *soma* de A com B à matriz $m \times n$ cujo termo geral é $a_{ij} + b_{ij}$, isto é:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

A operação (função) $+$: $M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \to M_{m \times n}(\mathbb{R})$ que a cada par de matrizes (A, B) associa a matriz $A + B$ chama-se *adição* de matrizes.

Exemplo: Sendo $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & b \end{pmatrix}_{2\times 2}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$, temos $A + B = \begin{pmatrix} a+2 & -1+x \\ 2+y & b+3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$.

5.2. Multiplicação por escalar (multiplicação de uma matriz por um número)

Dados a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e um número real λ, o produto indicado por $\lambda.A$, é a matriz $m \times n$ cujo termo geral é $\lambda.a_{ij}$, isto é:

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12} & \dots & \lambda.a_{1n} \\ \lambda.a_{21} & \lambda.a_{22} & \dots & \lambda.a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda.a_{m1} & \lambda.a_{m2} & \dots & \lambda.a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

A operação (função) $\bullet$: $\mathbb{R} \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \to M_{m \times n}(\mathbb{R})$ que a cada par (λ, A) associa a matriz $\lambda.A$ chama-se *multiplicação por escalar*.

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & 2 & d \\ e & f & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ e $\lambda = 4$, teremos

$$\lambda.A = 4.A = \begin{pmatrix} 4 & 4a & 4b \\ 4c & 8 & 4d \\ 4e & 4f & 12 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

5.3. Subtração

Se $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, então definimos: $A - B = A + (-B)$.

Em outras palavras, definimos a diferença entre as matrizes reais A e B, ambas de ordem $m \times n$, como sendo a soma da matriz A com a matriz oposta de *Bi*.

5.4. Multiplicação de matrizes

Consideremos as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times t}$. O produto de A por B, indicado por $A.B$. é a matriz $m \times t$ cujo termo geral é c_{ik}, onde:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + \dots + a_{in}.b_{nk}.$$

A operação (função) $\bullet$: $M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \to M_{m \times n}(\mathbb{R})$ que a cada par de matrizes (A, B) associa a matriz $A.B$ é chamada *multiplicação* de matrizes.

Observações:

a) Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{t \times k}$, então o produto $A.B$ existe se, e somente se, $n = t$ (isto é, o número de colunas da matriz à esquerda deve ser igual ao número de linhas da matriz à direita).

b) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, temos:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (verifique!)}$$

Daqui segue que existem matrizes A e B tais que $A.B \neq B.A$. Em outras palavras, a multiplicação ed matrizes *não é* uma operação *comutativa*.

Se A e B são duas matrizes tais que $A.B = B.A$, então diremos que as matrizes A e B *comutam* ou ainda, que A e B são *comutáveis*.

6. Propriedades

Suponhamos que as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ são tais que as operações abaixo estejam definidas e que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Então valem as seguintes propriedades:

I) $(A+B)+C = A+(B+C)$, isto é, a adição de matrizes é *associativa*.

II) $A+B = B+A$, isto é, a adição de matrizes é *comutativa*.

III) Existe uma matriz $O \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+O = O+A = A$, $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, isto é, a adição de matrizes admite *elemento neutro* e é claro que este elemento é a matriz nula.

IV) Para toda matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, existe uma matriz indicada por $-A$, também de ordem $m \times n$, chamada *matriz oposta* de A, tal que $A+(-A) = (-A)+A = O$ (*existência de oposto*).

V) $(A^t)^t = A$ e $(\lambda_1 . A)^t = \lambda_1 . A^t$.

VI) $(A+B)^t = A^t + B^t$.

VII) $\lambda_1.(\lambda_2 . A) = \lambda_2.(\lambda_1 . A) = (\lambda_1 . \lambda_2). A$.

VIII) $(\lambda_1 + \lambda_2). A = \lambda_1 . A + \lambda_2 . A$.

IX) $\lambda_1.(A+B) = \lambda_1 . A + \lambda_1 . B$.

X) $1.A = A$.

XI) $(A.B).C = A.(B.C)$, isto é, a multiplicação de matrizes é *associativa*.

XII) $(A.B)^t = B^t . A^t$ (cuidado com a ordem, pois a multiplicação de matrizes *não é comutativa*).

XIII) a) $A.(B+C) = A.B + A.C$, isto é, a multiplicação de matrizes é *distributiva à esquerda* em relação à adição de matrizes.

b) $(B+C).A = B.A + C.A$, isto é, a multiplicação de matrizes é *distributiva à direita* em relação à adição de matrizes.

Sendo assim, concluímos que a operação de multiplicação de matrizes é *distributiva* em relação à operação de adição de matrizes.

XIV) $A.I_n = I_m . A = A$, para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ (*elemento neutro da multiplicação* de matrizes).

XV) $(\lambda_1 . A).B = A.(\lambda_1 . B) = \lambda_1 .(A.B)$.

XVI) $A.O_{n \times t} = O_{m \times t}$ e $O_{p \times m} . A = O_{p \times n}$, para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. A soma de todos os elementos da matriz A = (a_{ij}), 2 × 2, definida por $a_{ij} = 3i - 2j - 1$, é igual a:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

02. Se a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ x^2 & 0 & 1-y \\ x & y-3 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, então o valor de $x + y$ é:

A) 3 B) 1 C) 0 D) –2 E) –3

03. Se uma matriz quadrada A é tal que $A^t = -A$ ela é chamada antissimétrica. Sabe-se que M é antissimétrica e,

$$M = \begin{bmatrix} 4+a & \dots & \dots \\ a & b+2 & \dots \\ b & c & 2c-8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Os termos a_{12}, a_{13} e a_{23} da matriz M valem respectivamente:

A) –4, –2 e 4.
B) 4, 2 e –4.
C) 4, –2 e –4.
D) 2, –4 e 2.
E) N.D.A.

04. Se $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, a matriz transposta de $P - 2Q$ é:

A) $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

05. Dadas as matrizes:
$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$ e sendo $3A=B+C$, então

A) $x+y+z+w=11$
B) $x+y+z+w=10$
C) $x+y-z-w=0$
D) $x+y-z-w=-1$
E) $x+y+z+w>11$

06. Considere as matrizes $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. A soma dos elementos da primeira linha de A.B é:

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

07. Se A é matriz 3 × 4 e B uma matriz $n \times m$, então:
A) existe $A+B$ se, e somente se, $n=4$ e $m=3$.
B) existe AB se, e somente se, $n=4$ e $m=3$.
C) existe AB e BA se, e somente se, $n=4$ e $m=3$.
D) existem, iguais, $A+B$ e $B+A$ se, e somente se, $A=B$.
E) existem, iguais, AB e BA se, e somente se, $A=B$.

08. Considere as matrizes:
1) A = (a_{ij}), 3 × 4, definida por $a_{ij}=i-j$;
2) B = (b_{ij}), 4 × 3, definida por $b_{ij}=2^{i-j}$;
3) C = (c_{ij}), $C=A\times B$.
O elemento c_{32} é:

A) –7 B) –4 C) –2 D) 0 E) 2

09. Considere as matrizes:
1) A = (a_{ij}), 4 × 7, definida por $a_{ij}=i-j$;
2) B = (b_{ij}), 7 × 9, definida por $b_{ij}=i$;
3) C = (c_{ij}), $\boxed{}$.
O elemento c_{63}

A) –112 B) –18 C) –9 D) 112 E) não existe

10. Se $A=\begin{pmatrix} \cos 15^\circ & -\operatorname{sen} 15^\circ \\ \operatorname{sen} 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix}$, então 2(A.A) é

A) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

11. Se $M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $N=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então $MN-NM$ é:

A) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

12. Se $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, então $A^2+2A-11I$, onde $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, é igual a:

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

13. Se a matriz A é igual a $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, então a matriz $(A^t)^2$ é igual a:

A) $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

14. São dadas as matrizes A = (a_{ij}) e B = (b_{ij}), quadradas de ordem 2 com $a_{ij}=3i+4j$ e $b_{ij}=-4i-3j$. Se $C=A+B$, então C^2 é igual a:

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

15. Multiplicando $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtemos $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
O produto dos elementos a e b da primeira matriz é:
A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 6

16. Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrizes tais que $A.B^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, então a e b valem, respectivamente:
A) 7 e 4 B) 7 e 3 C) 6 e 4 D) 6 e 3 E) 2 e 2

17. Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, podemos verificar que a igualdade $AB = BA$:
A) é válida $\forall x$.
B) é válida se $x = 0$.
C) é válida se $x = \pm 1$.
D) é válida só para $x = 1$.
E) não se verifica para nenhum valor de *x*.

18. O valor de x para que o produto das matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ seja uma matriz simétrica é:
A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

19. Se A e B são matrizes tais que $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Então a matriz $Y = A^t.B$ será nula para:
A) $x = 0$ B) $x = -1$ C) $x = -2$ D) $x = -3$ E) $x = -4$

20. Seja *x* um número real. Se as matrizes A, B e C são escolhidas entre as listadas abaixo:

$$\begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$$

e se $AB - C$ é uma matriz nula, então *x* é igual a
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21. Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. A matriz X tal que $X = AX + B$ tem como soma de seus elementos o valor
A) 2 B) –2 C) 0 D) 4 E) –4

22. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, uma matriz coluna $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tal que $AX = 3X$, é:
A) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

23. Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, então a matriz $A^2 + B - C$ é igual a:
A) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

24. Dada a matriz A = $(a_{mn})2\times2$, onde $a_{mn} = 2^{n-m}$, a soma de todos os elementos que compõe a matriz A^2 é igual a:
A) $\frac{81}{4}$ B) 10 C) 9 D) $\frac{25}{4}$ E) –6

25. Se A e B são matrizes de tipo 2 × 3, qual das seguintes operações não pode ser efetuada?
A) $A + B$ B) $A^t - B^t$ C) $(A + B).B^t$ D) $B^t.A$ E) $A.B$

26. A matriz X, tal que $AX = B$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ é:}$$

A) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
B) $X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
C) $X = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
D) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
E) $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

27. Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$. A igualdade $A.B=C$ é verdadeira se:

A) $x+y=2$
B) $x=2y$
C) $xy=0$
D) $y=2x$
E) $y-x=2$

28. Sabendo que $\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, o valor de yz é:

A) –6 B) –5 C) –1 D) 5 E) 6

29. Sejam as matrizes $M=\begin{pmatrix}p & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ e $T=\begin{pmatrix}2\\ q\end{pmatrix}$. Se M.T é a matriz nula 2×1, então $p.q$ é igual a:

A) –12 B) –15 C) –16 D) –18 E) n.d.a.

30. Dada a equação matricial:

$$\begin{pmatrix}x & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ y & z\end{pmatrix},$$

o valor do produto xyz é igual a:

A) 80 B) 150 C) 120 D) 60 E) 32

31. $M=\begin{bmatrix}x & 8\\ 10 & y\end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix}y & 6\\ 12 & x+4\end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix}7 & 16\\ 23 & 13\end{bmatrix}$ são matrizes que satisfazem a igualdade: $\frac{3}{2}M+\frac{2}{3}N=P$; logo, $y-x$ é:

A) 6 B) 4 C) 2 D) –3 E) $\frac{7}{10}$

32. Sabe-se que as ordens das matrizes A, B e C são, respectivamente, $3\times r$, $3\times s$ e $2\times t$. Se a matriz $(A-B).C$ é de ordem 3×4, então r + s + t é igual a:

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

33. Ache $D=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$.

A) $\begin{bmatrix}x+3y\\ 2x+4y\end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix}x & 3y\\ 2x & 4y\end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix}x & -3y\\ 2x & -4y\end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix}x & 4y\\ 3y & 2x\end{bmatrix}$
E) $[-2xy]$

34. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$, calcular A.B.

A) $\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$

35. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, conclui-se que a matriz:

A) AB é nula.
B) A^2 é nula.
C) $A+B$ é nula.
D) BA é não nula.
E) B^2 é nula.

36. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & -4\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, então $AB-BA$ é igual a:

A) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & 7\\ 9 & 1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 7\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & 0\end{bmatrix}$

37. Assinale a proposição verdadeira: o produto da matriz $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ pela matriz $\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ é comutativo se:

A) $x=1$ e $y=0$.
B) $x=2$ e $y=0$.
C) $x=1$ e para todo y $\in$ R.
D) $x=5$ e para todo y $\in$ R.
E) $x=10$ e $y=0$.

38. São matrizes respectivamente simétrica e transposta de $\begin{pmatrix}1 & -6 & 7\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$:

A) $\begin{pmatrix}-1 & 6 & -7\\ -4 & 0 & -2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 1 & -6 & 7\end{pmatrix}$.

B) $\begin{pmatrix}1 & 4\\ -6 & 0\\ 7 & 2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1 & 6 & -7\\ -4 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

C) $\begin{pmatrix}-1 & 6 & -7\\ -4 & 0 & -2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1 & 4\\ -6 & 0\\ 7 & 2\end{pmatrix}$.

D) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 7 & -6 & 1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1 & 7 & -6\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

E) $\begin{pmatrix}7 & 2\\ -6 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -6\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.

39. De uma matriz quadrada M, pode-se extrair um total de 100 matrizes de 2a ordem. O número de colunas da matriz M é:
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

40. A matriz oposta da matriz 2 × 2, definida por $\begin{cases} a_{ij} = i + 2j, i \neq j \\ a_{ij} = i - 2j, i = j \end{cases}$ é:

A) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

41. Dada a equação matricial $AX = B$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, a matriz X será:

A) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

42. Se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, os valores de a, b, c e d, nessa ordem, são:

A) −1, 1, −2 e $\frac{1}{2}$. C) −2, 2, −4 e −2.

B) −2, 2, −4 e $-\frac{1}{2}$. D) 2, −2, 4 e −2.

43. Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ e B uma matriz de ordem $r \times s$. Para que o produto A × B exista é necessário que:
A) $m = r$ B) $n = r$ C) $m = s$ D) $n = s$ E) $m = r$

44. O produto matricial AB, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ vale:

A) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

45. Se A é uma matriz do tipo 2 × 3 e AB é do tipo 2 × 5, então B é uma matriz do tipo:
A) 2 × 5 B) 3 × 3 C) 5 × 3 D) 3 × 5

46. Se $A = \begin{pmatrix} -2x & 1 & x \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 20 \\ -6 \end{pmatrix}$ e $A.B = C$, então $\log_4 x$ é:

A) 0 B) 2 C) 1 D) não existe. E) $\frac{1}{2}$

47. O sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ tem representação matricial:

A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

48. Dada a matriz A = $(a_{ij})2\times2$ tal que:

$$\begin{cases} a_{ij} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} i\right) \text{se } i = j \\ a_{ij} = \cos(\pi j) \text{se } i \neq j \end{cases}$$

então A^2 é a matriz:

A) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

49. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, determine X, tal que $AX = B$.

A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

50. A matriz transposta da matriz quadrada A = (aij) de ordem 2 com $a_{ij} = i^j + 2$, 1 ≤ i ≤ 2, 1 ≤ j ≤ 2, é:

A) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

51. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, a matriz B, tal que $AB=I$, sendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, vale:

A) $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

52. Sendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ e A^t a matriz transposta de A, então o valor de $A^t.B$ é:

A) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

53. Se C = [c_{ij}] é a soma das matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 4\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & -4\end{bmatrix}$, pode-se afirmar que $\sum_{j=1}^{3} c_{1j}$ é igual a:

A) 2 B) 0 C) 16 D) 3 E) n.d.a.

54. Se $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 11\end{pmatrix}$, então a matriz $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ é:

A) $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix}10\\ 11\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}-4\\ 11\end{pmatrix}$

55. Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e A^t sua transposta, então A, tal que $A=2.A^t$, vale:

A) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix}4 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Gabarito

01. C	16. A	31. B	46. C
02. B	17. E	32. B	47. E
03. B	18. C	33. A	48. E
04. B	19. E	34. A	49. A
05. B	20. A	35. B	50. C
06. E	21. B	36. B	51. B
07. C	22. B	37. C	52. B
08. C	23. D	38. C	53. C
09. E	24. C	39. A	54. A
10. A	25. E	40. D	55. E
11. A	26. B	41. E	
12. C	27. C	42. B	
13. A	28. D	43. B	
14. B	29. D	44. A	
15. C	30. C	45. D	