Ministério da Fazenda – ESAF - 2012

01. A proposição $p \wedge (p \rightarrow q)$ é logicamente equivalente à proposição:
a) $p \vee q$
b) $\sim p$
c) p
d) $\sim q$
e) $p \wedge q$

Resolução:

Inicialmente, construiremos a tabela-verdade da proposição $p \wedge (p \rightarrow q)$ e, a seguir confrontaremos com as tabelas-verdade das proposições de cada alternativa:

p	***q***
V	V
V	F
F	V
F	F

p	$\wedge$	**(*p***	$\rightarrow$	***q*)**
V	**V**	V	V	V
V	**F**	V	F	F
F	**F**	F	V	V
F	**F**	F	V	F
1º	**3º**	**1º**	**2º**	**1º**

Podemos observar pela solução obtida anteriormente (**VFFF**), que essa se assemelha à solução de uma conjunção:

p	***q***
V	V
V	F
F	V
F	F

p	$\wedge$	***Q***
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**F**	V
F	**F**	F
1º	**2º**	**1º**

Portanto, **gabarito letra "e"**.

02. Se Marta é estudante, então Pedro não é professor. Se Pedro não é professor, então Murilo trabalha. Se Murilo trabalha, então hoje não é domingo. Ora, hoje é domingo. Logo,
a) Marta não é estudante e Murilo trabalha.
b) Marta não é estudante e Murilo não trabalha.
c) Marta é estudante ou Murilo trabalha.
d) Marta é estudante e Pedro é professor.
e) Murilo trabalha e Pedro é professor.

Resolução:

Seja o seguinte ***argumento*** formado pelas ***premissas*** P_1, P_2, P_3 e P_4.

P_1: Se Marta é estudante, então Pedro não é professor.
P_2: Se Pedro não é professor, então Murilo trabalha.
P_3: Se Murilo trabalha, então hoje não é domingo.
P_4: Hoje é domingo

Para que esse ***argumento*** seja ***válido***, devemos considerar que todas essas ***premissas*** sejam ***verdadeiras***.

$$P_1: \text{ Marta é estudante} \rightarrow \text{Pedro não é professor} \therefore (V)$$
$$P_2: \text{ Pedro não é professor} \rightarrow \text{Murilo trabalha} \therefore (V)$$
$$P_3: \text{ Murilo trabalha} \rightarrow \text{hoje não é domingo} \therefore (V)$$
$$P_4: \text{Hoje é domingo} \therefore (V)$$

Utilizaremos o ***método*** das ***atribuições de valores*** para determinarmos os ***valores lógicos*** das ***proposições simples*** que compõe as ***condicionais*** apresentadas nas ***premissas*** P_1, P_2 e P_3.

Sabendo-se que a ***premissa* P_4**, formada pela ***proposição simples*** "Hoje é domingo" é ***verdadeira*** **(1º passo)**, então a **2ª parte** da ***condicional*** apresentada na ***premissa* P_3** será ***falsa*** **(2º passo).**

$$P_1: \text{ Marta é estudante} \rightarrow \text{Pedro não é professor}$$
$$P_2: \text{ Pedro não é professor} \rightarrow \text{Murilo trabalha}$$
$$P_3: \text{ Murilo trabalha} \rightarrow \underbrace{\text{hoje não é domingo}}_{\textbf{F}\ (2^o \text{ passo})}$$
$$P_4: \underbrace{\text{Hoje é domingo}}_{\textbf{V}\ (1^o \text{ passo})}$$

Sendo ***falsa*** a **2ª parte** da ***condicional*** da ***premissa* P_3**, então sua **1ª parte** também deverá ser ***falsa*** **(3º passo)** e, tal resultado confirmará também como ***falsa***, a **2ª parte** da ***condicional*** da ***premissa* P_2** **(4º passo)**.

$$P_1:\ \text{Marta é estudante} \rightarrow \text{Pedro não é professor}$$

$$P_2:\ \text{Pedro não é professor} \rightarrow \underbrace{\text{Murilo trabalha}}_{\textbf{F}\ (4^o\ \text{passo})}$$

$$P_3:\ \underbrace{\text{Murilo trabalha}}_{\textbf{F}\ (3^o\ \text{passo})} \rightarrow \underbrace{\text{hoje não é domingo}}_{\textbf{F}\ (2^o\ \text{passo})}$$

$$P_4:\ \underbrace{\text{Hoje é domingo}}_{\textbf{V}\ (1^o\ \text{passo})}$$

De maneira análoga, confirmaremos como ***falsa*** a **1ª parte** da ***condicional*** da ***premissa*** **P$_2$ (5º passo)** o que tornará, também ***falsa***, a **2ª parte** da ***condicional*** da ***premissa*** **P1 (6º passo)**. Como já é sabido, sempre que confirmamos como ***falsa*** a **2ª parte** de uma ***condicional***, devemos confirmar também como ***falsa***, sua ***1ª parte*** **(7º passo)**. Assim, teremos:

$$P_1:\ \underbrace{\text{Marta é estudante}}_{\textbf{F}\ (7^o\ \text{passo})} \rightarrow \underbrace{\text{Pedro não é professor}}_{\textbf{F}\ (6^o\ \text{passo})}$$

$$P_2:\ \underbrace{\text{Pedro não é professor}}_{\textbf{F}\ (5^o\ \text{passo})} \rightarrow \underbrace{\text{Murilo trabalha}}_{\textbf{F}\ (4^o\ \text{passo})}$$

$$P_3:\ \underbrace{\text{Murilo trabalha}}_{\textbf{F}\ (3^o\ \text{passo})} \rightarrow \underbrace{\text{hoje não é domingo}}_{\textbf{F}\ (2^o\ \text{passo})}$$

$$P_4:\ \underbrace{\text{Hoje é domingo}}_{\textbf{V}\ (1^o\ \text{passo})}$$

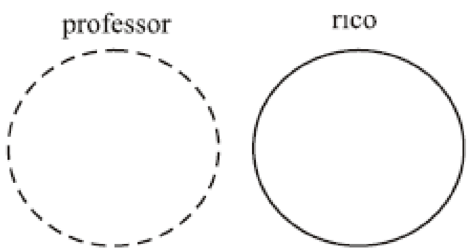
Logo, têm-se que: “Marta **não é** estudante”; “Pedro **é** professor”; “Murilo **não trabalha**” e “Hoje **é** domingo”. Portanto, **gabarito letra “b”**.

03. Em uma cidade as seguintes premissas são verdadeiras: Nenhum professor é rico. Alguns políticos são ricos. Então, pode-se afirmar que:
a) Nenhum professor é político.
b) Alguns professores são políticos.
c) Alguns políticos são professores.
d) Alguns políticos não são professores.
e) Nenhum político é professor.

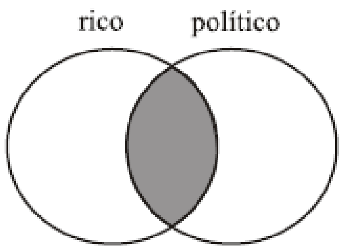
Resolução:

Representaremos, inicialmente, por meio de ***diagramas lógicos***, as ***proposições categóricas*** expressas no ***argumento*** do texto do enunciado:

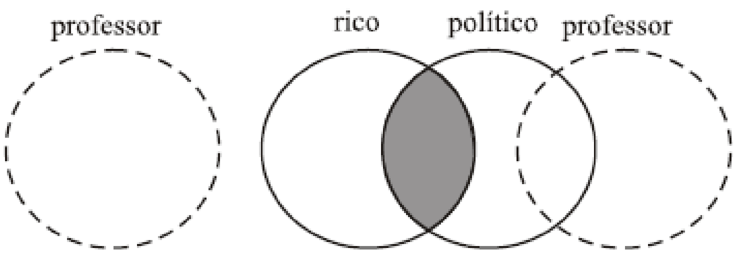
“Nenhum professor é rico”



“Alguns políticos são ricos”



Fazendo a união dos ***diagramas*** anteriores, podemos obter as seguintes relações:



Deste diagrama final, podemos obter as seguintes conclusões:

(I) nenhum professor é rico, mas pode ocorrer que alguns professores ***sejam*** políticos ou ***não***.
(II) alguns políticos são ricos e, consequentemente, não poderão ser professores.

Logo, **gabarito letra “d”**.

04. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule o determinante do produto A.B.

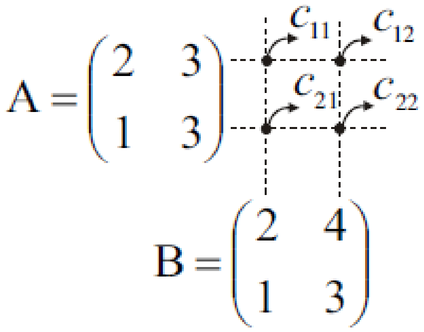
a) 8 b) 12 c) 9 d) 15 e) 6

Resolução:

Ao multiplicarmos uma matriz quadrada A de ordem 2 por outra matriz quadrada B, também de ordem 2, o resultado obtido será uma terceira matriz quadrada C, de mesma ordem:

$$C = A.B \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}_{matriz\,C} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{matriz\,A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{matriz\,B}$$

onde, c_{11}, c_{12}, c_{21} e c_{22}, são os elementos da matriz C formados pela multiplicação entre as linhas da matriz A pelas colunas da matriz B.



c_{11}: resultado obtido pela multiplicação entre a **1ª linha** da matriz **A** pela **1ª coluna** da matriz **B**.
c_{12}: resultado obtido pela multiplicação entre a **1ª linha** da matriz **A** pela **2ª coluna** da matriz **B**.
c_{21}: resultado obtido pela multiplicação entre a **2ª linha** da matriz **A** pela **1ª coluna** da matriz **B**.
c_{22}: resultado obtido pela multiplicação entre a **2ª linha** da matriz **A** pela **2ª coluna** da matriz **B**.

$$c_{11} = 2 \times 2 + 3 \times 1 = 7$$
$$c_{12} = 2 \times 4 + 3 \times 3 = 17$$
$$c_{21} = 1 \times 2 + 3 \times 1 = 5$$
$$c_{22} = 1 \times 4 + 3 \times 3 = 13$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

O ***determinante*** é o ***valor numérico*** de uma ***matriz de ordem quadrada***. No caso de uma matriz de **ordem 2**, tem-se que o ***determinante*** é calculado pela “diferença entre os produtos dos elementos que se encontram, respectivamente, nas diagonais principais e secundárias”:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(C) = 7 \times 13 - 5 \times 17 \quad \Rightarrow \quad \det(C) = 91 - 85 \quad \Rightarrow \quad \det(C) = 6$$

Logo, **gabarito letra "e"**.

05. Dado o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=3 \\ x-y+5z=6 \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$$

O valor de $x + y + z$ é igual a
a) 8.
b) 16.
c) 4.
d) 12.
e) 14.

Resolução:

Tentaremos, aqui, uma ***solução trivial***, ou seja, ***somando-se*** todos os termos que estão localizados à ***esquerda*** de cada igualdade e, simetricamente, os termos que se encontram à ***direta*** dessas mesmas igualdades:

$$\begin{array}{l} +\begin{cases} 2x+3y-4z=3 \\ x-y+5z=6 \\ x+2y+3z=7 \end{cases} \\ \hline \quad 4x+4y+4z=16 \end{array} \quad \Rightarrow \quad (4x+4y+4z=16)\div 4 \quad \Rightarrow \quad x+y+z=4$$

Logo, **gabarito letra "c"**.

06. Sorteando-se um número de uma lista de 1 a 100, qual a probabilidade de o número ser divisível por 3 ou por 8?

a) 41%
b) 44%
c) 42%
d) 45%
e) 43%

Resolução:

A probabilidade de sair um número divisível por 3 (ou múltiplo de 3) é a probabilidade de ocorrer o evento *A* = {3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; 48; 51; 54; 57; 60; 63; 66; 69; 72; 75; 78; 81; 84; 87; 90; 93; 96; 99}.

Como: *n*(*A*) = 33 múltiplos de 3 entre 1 e 100 e *n*(*S*) = 100 números naturais, então, tem-se: $\left\| P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} \right\| \Rightarrow P(A) = \dfrac{33}{100}$

A probabilidade de sair um múltiplo de 8 é a probabilidade de ocorrer o evento *B* = {8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; 72; 80; 88; 96}.

Como: *n*(*B*) = 12 múltiplos de 8 entre 1 e 100 e *n*(*S*) = 100 números naturais, então, tem-se: $\left\| P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} \right\| \Rightarrow P(A) = \dfrac{12}{100}$

Sendo A = {3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; **24**; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; **48**; 51; 54; 57; 60; 63; 66; 69; **72**; 75; 78; 81; 84; 87; 90; 93; **96**; 99}, e B = {8; 16; **24**; 32; 40; **48**; 56; 64; **72**; 80; 88; **96**}, então $A \cap B$ será dado por: $(A \cap B) = \{\mathbf{24}, \mathbf{48}, \mathbf{72}, \mathbf{96}\}$

Portanto, a probabilidade de $P(A \cap B)$ será de:

$$\left\| P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \right\| \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{100}$$

Onde $n(A \cap B)$ representa os 3 múltiplos simultâneos de 3 e 8, compreendidos entre 1 e 100.

Então, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{33}{100} + \dfrac{12}{100} - \dfrac{4}{100} = \dfrac{41}{100}$ ou 41%.

Assim, a probabilidade de sair um múltiplo de 3 **ou** 8 será de $\dfrac{41}{100}$ ou 41%

Logo, **gabarito letra "a"**.

07. Uma caixa contém 3 bolas brancas e 2 pretas. Duas bolas serão retiradas dessa caixa, uma a uma e sem reposição, qual a probabilidade de serem da mesma cor?

a) 55%
b) 50%
c) 40%
d) 45%
e) 35%

Resolução:

Espaço amostral (S): 3 bolas brancas e 2 bolas pretas.
Número de elementos do espaço amostral: $n(S) = 5$ bolas.

Nesse caso, ou as ***duas bolas*** serão ***brancas***, ou ***pretas***.

Probabilidade de ambas serem brancas (***sem reposição***):

$$P(B\ \mathbf{e}\ B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \quad \Rightarrow \quad P(B\ \mathbf{e}\ B) = \frac{6^{\div 2}}{20_{2}} = \frac{3}{10}.$$

Probabilidade de ambas serem pretas (***sem reposição***):

$$P(P\ \mathbf{e}\ P) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad P(B\ \mathbf{e}\ B) = \frac{2^{\div 2}}{20_{2}} = \frac{1}{10}.$$

Portanto, a probabilidade de serem da mesma cor será dada por:

$$P(B\ \mathbf{e}\ B)\ \mathbf{ou}\ P(P\ \mathbf{e}\ P) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad P(B\ \mathbf{e}\ B)\ \mathbf{ou}\ P(P\ \mathbf{e}\ P) = \frac{4}{10} \text{ ou } 0{,}4 \text{ ou } 40\%$$

Logo, **gabarito letra "c"**.

08. O número de centenas ímpares e maiores do que trezentos, com algarismos distintos, formadas pelos algarismos 1, 2, 3, 4 e 6, é igual a

a) 15.
b) 9.
c) 18.
d) 6.
e) 12.

Resolução:

Centenas iniciando-se pelo ***algarismo*** **3** e terminando, necessariamente, com o ***algarismo*** **1**.

$$\underbrace{1}_{3} \times \underbrace{3}_{2;\ 4 \text{ ou } 6} \times \underbrace{1}_{1} = \mathbf{3}\ \textbf{\textit{possibilidades}}.$$

Centenas iniciando-se pelo ***algarismo*** **4** e terminando, necessariamente, com o ***algarismos*** **1**.

$$\underbrace{1}_{4} \times \underbrace{3}_{2;\ 3;\ \text{ou } 6} \times \underbrace{1}_{1} = \mathbf{3}\ \textbf{\textit{possibilidades}}.$$

Centenas iniciando-se pelo ***algarismo*** **4** e terminando, necessariamente, com o ***algarismos*** **3**.

$$\underbrace{1}_{4} \times \underbrace{3}_{1;\ 2;\ \text{ou } 6} \times \underbrace{1}_{3} = \mathbf{3}\ \textbf{\textit{possibilidades}}.$$

Centenas iniciando-se pelo ***algarismo*** **6** e terminando, necessariamente, com o ***algarismos*** **1**.

$$\underbrace{1}_{6} \times \underbrace{3}_{2;\ 3;\ \text{ou } 4} \times \underbrace{1}_{1} = \mathbf{3}\ \textbf{\textit{possibilidades}}.$$

Centenas iniciando-se pelo ***algarismo*** **6** e terminando, necessariamente, com o ***algarismos*** **3**.

$$\underbrace{1}_{6} \times \underbrace{3}_{1;\ 2;\ \text{ou } 4} \times \underbrace{1}_{3} = \mathbf{3}\ \textbf{\textit{possibilidades}}.$$

Num total de 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = **15 *possibilidades***.

Logo, **gabarito letra “a”**.

09. Dos aprovados em um concurso público, os seis primeiros foram Ana, Bianca, Carlos, Danilo, Emerson e Fabiano. Esses seis aprovados serão alocados nas salas numeradas de 1 a

6, sendo um em cada sala e obedecendo a determinação de que na sala 1 será alocado um homem. Então, o número de possibilidades distintas de alocação desses seis aprovados é igual a
a) 720.
b) 480.
c) 610.
d) 360.
e) 540.

Resolução:

Na **1ª sala** teremos **4 *possibilidades*** de escolhas, ou seja, apenas os **4 *homens***.
Na **2ª sala** teremos **5 *possibilidades*** de escolhas, ou seja, **3 *homens*** e **2 *mulheres***, já que **1** dos ***homens*** estará presente na **1ª sala**.
Na **3ª sala** teremos **4 *possibilidades*** de escolhas, já que **2** das **6 *pessoas*** já estão alocadas nas duas primeiras salas.
E, assim, sucessivamente, teremos para as demais salas, as seguintes possibilidades.
Na **4ª sala** teremos **3 *possibilidades***.
Na **3ª sala** teremos **2 *possibilidades***.

$$\underbrace{4}_{\substack{sala\ 1 \\ 4\ possibilidadaes}} \times \underbrace{5}_{\substack{sala\ 2 \\ 5\ possibilidadaes}} \times \underbrace{4}_{\substack{sala\ 3 \\ 5\ possibilidadaes}} \times \underbrace{3}_{\substack{sala\ 4 \\ 3\ possibilidadaes}} \times \underbrace{2}_{\substack{sala\ 5 \\ 2\ possibilidadaes}} = \mathbf{480}\ \boldsymbol{possibilidades}.$$

Logo, **gabarito letra “b”**.

10. Uma reunião no Ministério da Fazenda será composta por seis pessoas, a Presidenta, o Vice-Presidente e quatro Ministros. De quantas formas distintas essas seis pessoas podem se

sentar em torno de uma mesa redonda, de modo que a Presidenta e o Vice-Presidente fiquem juntos?
a) 96
b) 360
c) 120
d) 48
e) 24

Resolução:

Consideraremos, inicialmente, a Presidenta e o Vice-Presidente como sendo "única pessoa". Assim, não havendo mais restrições, a quantidade de formas distintas que essas 5 pessoas poderão sentar-se em torno de uma mesa redonda será dada pela ***permutação circular***:

$(PC)_5 = (5 - 1)! \Rightarrow (PC)_5 = 4! \Rightarrow (PC)_5 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \Rightarrow (PC)_5 =$ **24 *formas distintas***.

Mesmo estando juntos, a Presidenta e o Vice-Presidente, os mesmos poderão permutar entre si de lugares, logo, devemos multiplicar o resultado anterior por 2!.

Total de formas distintas $= 24 \times 2! = 24 \times 2 = 48$.

Logo, **gabarito letra "d"**.